**Лекция 5.**

**Движение твердого тела вокруг неподвижной точки**

Пусть О – начало подвижного (O, , , ) и неподвижного (O,,,) репера. Из формулы связи координат: .

Можно выразить через углы Эйлера (которые известны из курса геометрии):  
 = (, ) = cosψcosϕ − sinψcosθsinϕ,  
 = (, ) = − cosψsinϕ − sinψcosθcosϕ,  
 = (, ) = sinψsinθ,  
 = (, ) = sinψcosϕ + cosψcosθsinϕ,   
 = (, ) = − sinψsinϕ +cosψcosθcosϕ,   
 = (, ) = − cosψsinθ,  
 = ( , ) = sinϕsinθ,   
 = (, ) = cosϕsinθ,   
 = (, ) = cosθ.

**Теорема:** Если , , . Тогда P = P3(ψ)P1(θ)P3(ϕ).

*Нулевое перемещение тела* - начальное и конечное положения каждой точки этого тела совпадают.

**Теорема Эйлера — Даламбера:** Для любого ненулевого перемещения Π твердого тела вокруг неподвижной точки существует единственная прямая l (ось вращения) такая, что перемещение Π можно представить как перемещение в результате поворота этого тела вокруг этой оси на некоторый угол α.

При существовании = lim∆t→0(/∆t), то прямая, проходяющая через неподвижную точку О (вокруг которой движется точка M), параллельная этому вектору – *мгновенная угловая скорость тела в момент t*, а - *мгновенной угловой скоростью в момент t* ( – угол перемещения от начального состояния до конечного). Геометрическое место мгновенных осей вращения в неподвижном и подвижном реперах - *неподвижный аксоид* и *подвижный аксоид*.

**Теорема (Пуансо):** При движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, подвижный аксоид катится без скольжения по неподвижному.

*Проекции угловой скорости тела с неподвижной точкой:*ωx = sinϕsinθ + cosϕ, ωξ = sinψsinθ + cosψ,  
ωy = cosϕsinθ − sinϕ, ωη = −cosψsinθ + sinψ,  
ωz = cosθ + ˙ϕ. ωζ = cosθ + ψ.

*Ускорение точек тела, имеющего неподвижную точку:*

Продифференцируем формулу Эйлера: , где = . Векторы , , - *угловое, вращательное и осестремительное ускорения* тела соответственно. Далее моно получить следующие формулы: , ,

*Скорость точек твердого тела в общем случае*Пусть (O’,,,) – подвижный репер, (O, , , ) – неподвижный репер, (ξ0, η0, ζ0) — координаты точки O’ в неподвижном репере. Связь координат в разных реперах: .

Перемещение точки M ∆, при и при . Далее делим на и переходим к пределу: , где lim∆t→0(/∆t) - мгновенная угловая скорость вращения тела вокруг точки O’ , а и — скорости точек M и O’ .

**Теорема:** Вектор не зависит от выбора полюса — точки O'. (Отсюда вектор - угловая скорость твердого тела в общем случае. Получим формулу – формула Эйлера в общем случае)  
**Следствие:** Проекции скоростей любых двух различных точек абсолютно твердого тела на направление соединяющего их отрезка равны между собой.

*Ускорение точек твердого тела в общем случае*

Продифференцируем формулу Эйлера: , где = - угловое ускорение твердого тела - радиус-вектор точки O’ (полюс); , - скорость и ускорение полюса.  
Представим , где, , , а - векторное удаление мгновенной оси вращения до точки M. По формуле Эйлера получаем: Вспоминая, что , получаем . - ускорение полюса, - вращательным ускорением, - осестремительным ускорением.